

Nova formulação para o comprimento do cabo parabólico

Lúcio Martins Laginha*

INTRODUÇÃO

Vamos imaginar um cabo para concreto protendido ou ponte pênsil na forma parabólica. Por hipótese a carga vertical total aplicada no cabo é considerada uniformemente distribuída na horizontal. Assim temos: ver figura 1.

A equação do cabo parabólico resulta da aplicação do equilíbrio:

$$yH = \frac{wl}{2}x - \frac{w}{2}x^2 \quad \text{ou} \quad y = \frac{wl}{2H}x - \frac{w}{2H}x^2$$

Sejam:

- x - abscissa horizontal;
- y - ordenadas verticais do cabo;
- T - força de tração no cabo, no apoio;
- R - componente vertical de T , no apoio;
- V - componente vertical de T , genérica;
- H - componente horizontal de T , invariante em x ;
- w - carga vertical uniformemente distribuída na horizontal;
- s - é o comprimento do cabo parabólico;
- l - é o vão livre;
- f - é a flecha de construção do cabo, no meio do vão.

DEDUÇÃO

Deduzamos o comprimento do cabo submetido apenas à carga w , onde y é a ordenada, conforme figura 1, e y' sua derivada em relação a x :

$$y = \frac{w}{2H}(lx - x^2) \quad y' = \frac{w}{H}(l/2 - x) \quad s = \int_0^l ds = \int_0^l \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$s = \int_0^l \sqrt{1 + y'^2} dx \quad y'^2 = \frac{V^2}{H^2} \Rightarrow s = \frac{1}{H} \int_0^l \sqrt{H^2 + V^2} dx$$

Para possibilitar a integração, troquemos convenientemente a variável x por V :

$$V = \frac{wl}{2} - wx \quad \frac{dV}{dx} = -w \Rightarrow dx = -\frac{dV}{w} \Rightarrow$$

$$s = -\frac{1}{wH} \int_R^{-H} \sqrt{V^2 + H^2} dV \quad \text{sendo } T = \sqrt{R^2 + H^2} \quad \text{obtem-se}$$

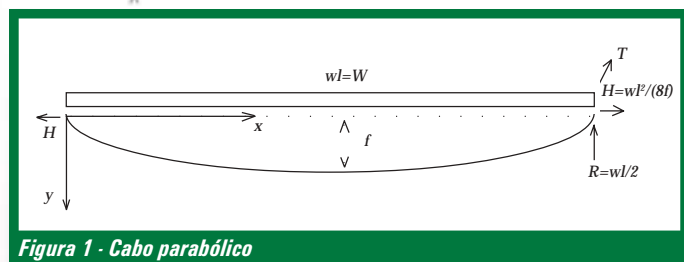


Figura 1 - Cabo parabólico

$$s = \frac{-1}{2wH} [VT + H^2 \ln(V + T)]_R^{-H}$$

resultando finalmente em:

$$s = \frac{RT}{wH} + \frac{H}{2w} \ln \frac{T + R}{T - R}$$

que é a fórmula exata do comprimento do cabo parabólico em forma simples, explicitando as forças presentes no polígono das forças.

EXEMPLOS

1. Calculemos agora o comprimento do cabo na configuração de referência s . Vamos usar como exemplo o modelo reduzido, figura 2, utilizado pelo autor nesta pesquisa [1], realizada na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, como podemos observar na foto da figura 2.



Figura 2 - Arranjo e estrutura experimental com relógios comparadores de centésimo de milímetro (LEM - EPUSP, 1994)

Dados e esforços:

- $l = 125 \text{ cm}$;
- $w = 1,0 \text{ N/cm}$;
- $R = 62,5 \text{ N}$;
- $H = 156,25 \text{ N}$;
- $f = 12,5 \text{ cm}$.

H é a componente horizontal da força T de tração no cabo calculada por $H = M/f$, onde M é o momento fletor no meio do vão, Teorema do Cabo [1]. Obtemos a força de tração do cabo nos apoios T aplicando-se Pitágoras, pois $T^2 = R^2 + H^2$. Obtemos então: $T = 168,2864 \text{ N}$

$$s = \frac{RT}{wH} + \frac{H}{2w} \ln \frac{T + R}{T - R} = 128,25758 \text{ cm}$$

Fórmula equivalente: A formulação tradicional encontrada na bibliografia para o cálculo do comprimento do cabo parabólico, onde $n = f/l = 0,1$ é:

$$s = \frac{l}{2} (1 + 16n^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{l}{8n} \ln[4n + (1 + 16n^2)^{\frac{1}{2}}] = 128,25758cm$$

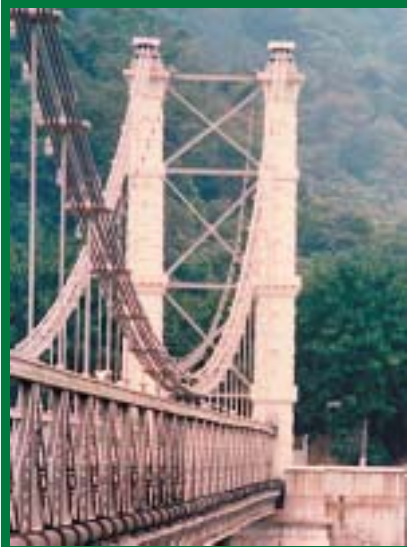


Figura 3 - Ponte Pênsil em São Vicente, ligando a Ilha ao continente, montada em 1914

Verificamos que as duas parcelas (as partes que se somam) das fórmulas acima são respectivamente iguais.

2. Cálculo do comprimento do cabo da Ponte Pênsil de São Vicente, figura 3, conforme dados apresentados no relatório de prova de carga do IPT [2], de autoria do prof.º Telêmaco van Langendonck:
 $I = 180m$;
 $f = 17,5m$;

$w = 1,8 \text{ tf/m}$;
 $H = 416,57\text{tf}$;
 $R = 162\text{tf}$.

Aplicando Pitágoras, obtemos
 $T = 446,96\text{tf}$

Aplicando a fórmula:

$$s = \frac{RT}{wH} + \frac{H}{2w} \ln \frac{T+R}{T-R} = 96,5660 + 94,9992 = 191,5652m$$

O que mais chama a atenção nesta formulação, além de sua originalidade, é o fato de obtermos comprimentos à partir somente de forças. O intuito da divulgação desta é disponibilizar o conhecimento para os colegas, engenheiros e principalmente estudiosos e pesquisadores.

* **Lúcio Martins Laginha** é engenheiro da Prefeitura do Município de São Paulo, mestre em engenharia civil pela Escola Politécnica, USP, e vice-coordenador da Divisão de Estruturas do Instituto de Engenharia
 E-mail: llaginha@ajato.com.br

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Laginha, L. M. - "O Equilíbrio do Cabo Pênsil", dissertação de mestrado, EPUSP, 1997.
- [2] Langendonck, Telêmaco van - "Prova de Carga das Pontes de São Vicente e de Jacarehy", Boletim 16, IPT, 1936.

www.brasilengenharia.com.br **ENGENHARIA**

PEDIDO DE ASSINATURA

ASSINATURA POR

- 1 ANO - R\$ 120,00
- 2 ANOS - R\$ 210,00

RECIBO EM NOME DE

- EMPRESA
- PESSOA FÍSICA

ANEXO ESTOU ENVIANDO:

- XEROX DO DEPÓSITO (ITAÚ - AG. 0285 C/C 22538-9)
- CHEQUE NOMINAL A ENGENHO EDITORA TÉCNICA LTDA.



Rua Alice de Castro, 47
 Vila Mariana - 04015 040
 São Paulo - SP
 Fones: (11) 5575 8155 / 5575 1069
 Fax: (11) 5575 8804
 E-mail: assinatura@engenhoeditora.com.br

Nome: _____

Empresa: _____

nº de empregados: _____

Ramo de atividade: _____

Cargo ou depto.: _____

Endereço: _____

CEP: _____ Cidade: _____ Estado: _____

DDD _____ Telefone: _____ Fax: _____

E-mail: _____

CNPJ ou CPF: _____

Inscr. Est.: _____

Assinatura _____